Лекция 11 Некоторые приложения определенного интеграла.

Тлеулесова А.М.

1) *Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме.*

2) *Геометрические приложения определенного интеграла.*

3) *Физические (механические) приложения определенного интеграла.*

Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + R(x),$$

$$R(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_a^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t)\,dt \qquad (0! = 1).$$

Действительно, последовательное интегрирование $R(x)$ по частям дает

$$R(x) = -\frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}\,(x-a)^{r-1} + \frac{1}{(r-2)!}\int_a^x (x-t)^{r-2} f^{(r-1)}(t)\,dt =$$

$$= -\frac{f^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}\,(x-a)^{r-1} - \frac{f^{(r-2)}(a)}{(r-2)!}\,(x-a)^{r-2} +$$

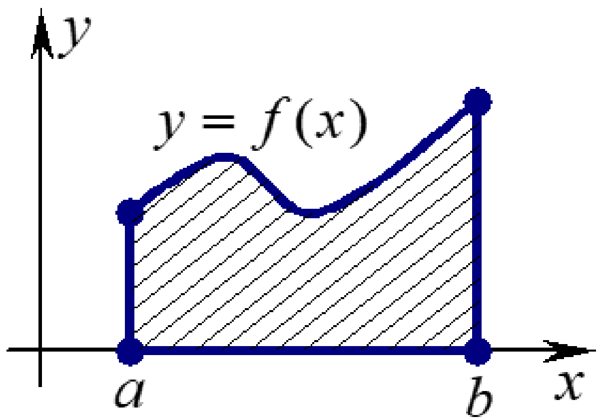
$$+ \frac{1}{(r-3)!}\int_a^x (x-t)^{r-3} f^{(r-2)}(t)\,dt = \ldots\ \ldots = -\sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + f(x).$$

Приложения определенного интеграла

1. Площадь плоской области

1. Основные случаи расположения плоских областей в ДСК:

а)



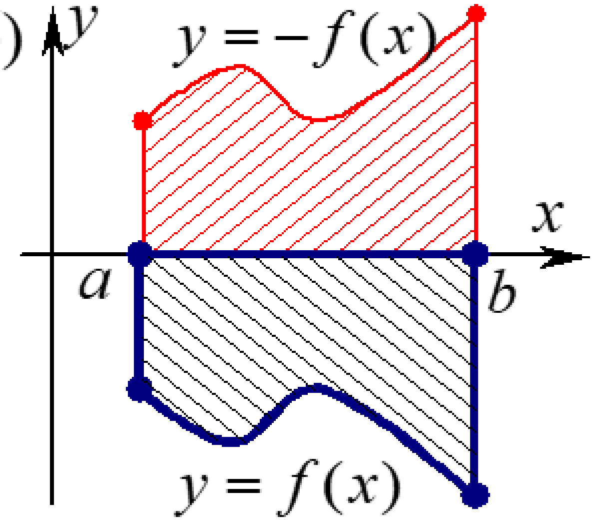
1. Если $y = f(x)$, то $S = \int_a^b f(x)dx.$

2. Если $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $S = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)dt,$

то

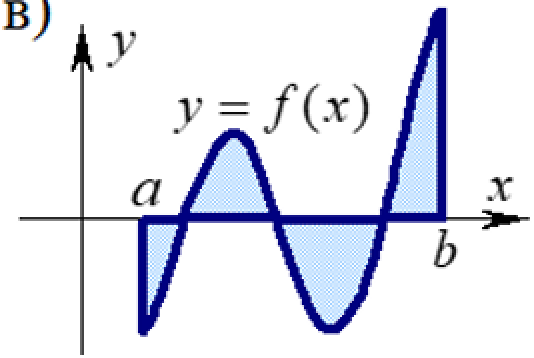
где $x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b.$

б)

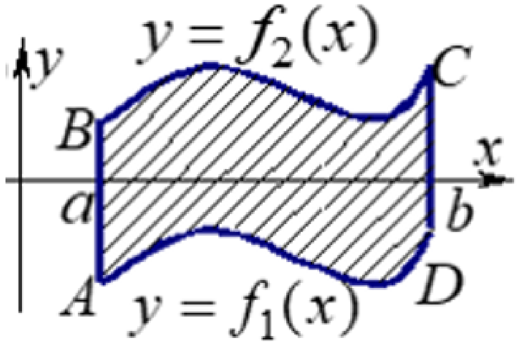


$$\Rightarrow \quad S = -\int_a^b f(x)dx.$$

в)



$$\Rightarrow \quad S = -S_1 + S_2 - S_3 + S_4.$$

в) 

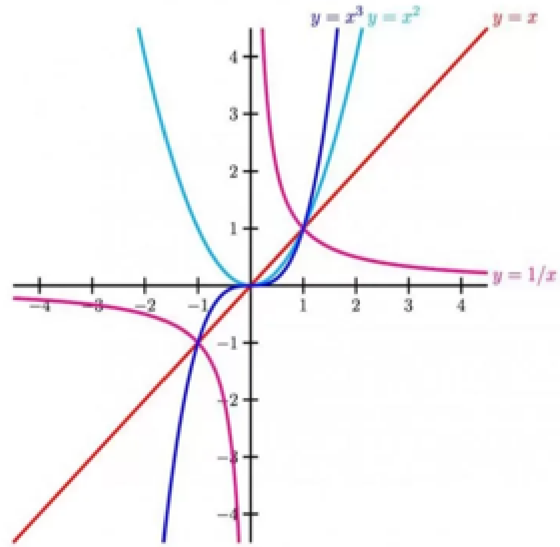
Пусть область D ограничена графиками функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, где $a < b$ и $f_1(x) \le f_2(x) \ \forall x \in [a; b]$.

Тогда площадь области D можно найти по формуле:

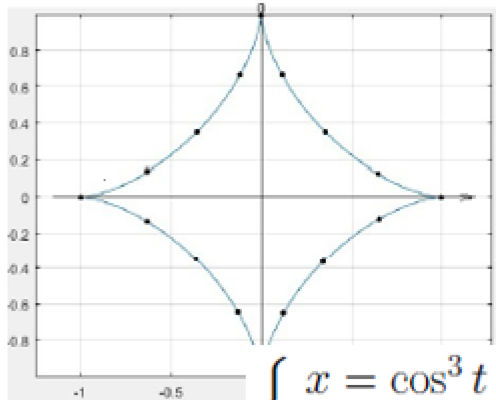
$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$$

Аналитический способ задания функции

1) $y = f(x)$ (или $F(x, y) = 0$)
уравнение функции, заданной явно (неявно)

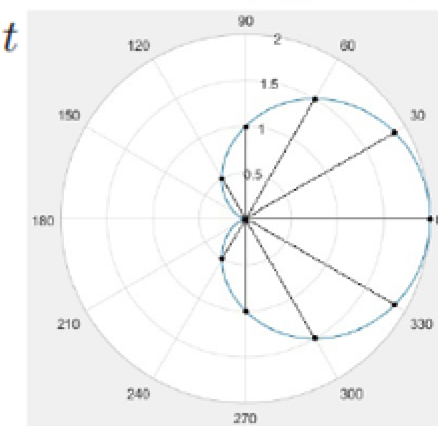


$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$



2) $x = x(t)$,
$y = y(t)$
параметрические уравнения кривой в ДСК

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$



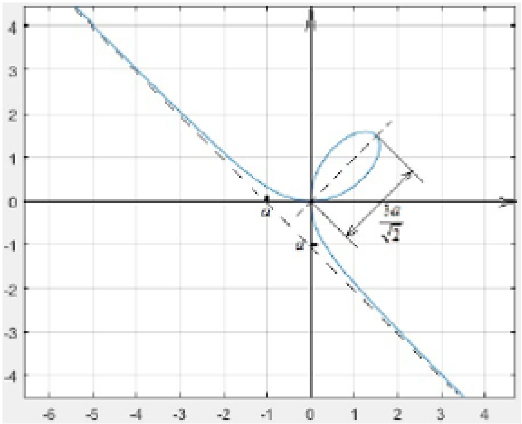
3) $r = r(\varphi)$ (или $\rho = \rho(\varphi)$)
уравнение кривой в ПСК

$$r = 1 + \cos\varphi$$

Аналитический способ задания функции

1) $y = f(x)$ (или $F(x, y) = 0$)
уравнение функции, заданной явно (неявно)

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$



2) $x = x(t)$,
$y = y(t)$
параметрические уравнения кривой в ДСК

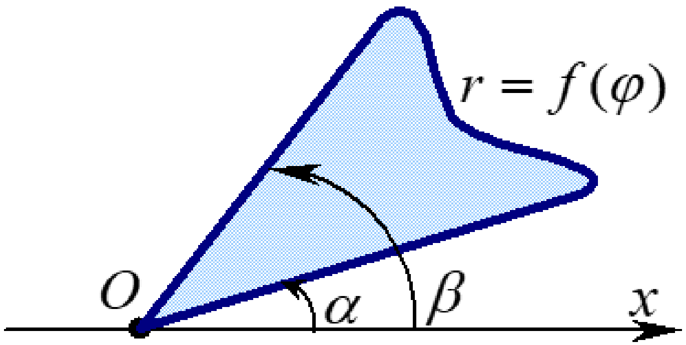
$$\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3}, \quad a = 1 \end{cases}$$

3) $r = r(\varphi)$ (или $\rho = \rho(\varphi)$)
уравнение кривой в ПСК

$$r = \frac{3\cos\varphi \sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}, \quad a = 1$$

2. *Плоская область в полярной системе координат.*

Криволинейным сектором называется область, ограниченная двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $r = r(\varphi)$, где $\alpha < \beta$.



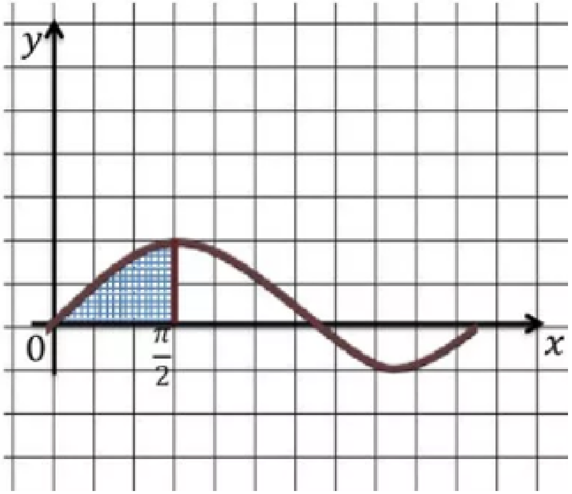
Площадь криволинейного сектора в ПСК находится по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.$$

Площадь плоской фигуры

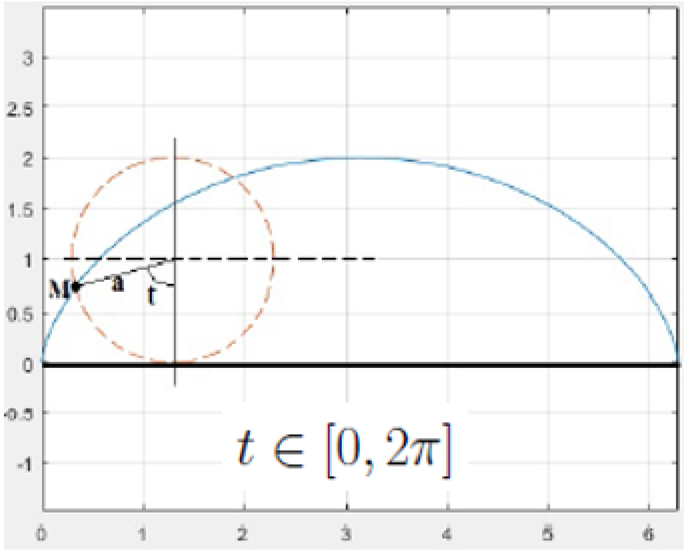
Область ограничена линиями	Формула
1) $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$	$S = \int_a^b f(x)dx$
2) $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$	$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$
3) $x = x(t)$, $y = y(t)$, $x(a) = \alpha$, $x(b) = \beta$	$S = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)dt$
4) $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \beta$	$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \pi/2$.



Решение.

Пример. Найти площадь первой арки циклоиды $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$.



Решение.

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)\,dt$$

2. Длина плоской кривой

I. *Плоская кривая в декартовой системе координат.*

Пусть $y = f(x)$ – непрерывно дифференцируема на $[a; b]$.

Задача. Найти длину ℓ кривой $y = f(x)$, где $x \in [a; b]$.

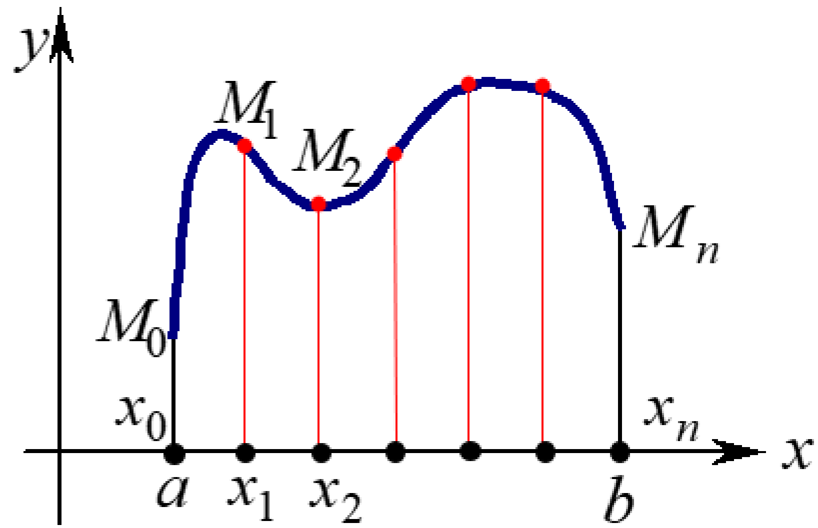
Решение.

Разобьем $[a; b]$ на n частей точками

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n = b \quad (\text{где } x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n).$$

$\Rightarrow$ (ℓ) разобьется на части $(\ell_1), (\ell_2), \ldots, (\ell_n)$ точками $M_0, M_1, \ldots, M_n$

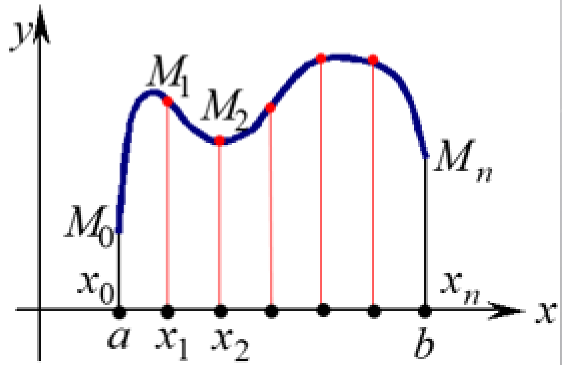
$\Rightarrow$ $\ell = \sum \ell_i$, где ℓ_i – длина (ℓ_i).



Рассмотрим дугу (ℓ_i).

Если (ℓ_i) мала, то $\ell_i \approx |M_{i-1}M_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$.

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$.



По теореме Лагранжа

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i) \cdot \Delta x_i,$$

где ξ_i – точка между x_{i-1} и x_i.

$$\Rightarrow \quad \ell_i \approx \sqrt{[\Delta x_i]^2 + [f'(\xi_i)\Delta x_i]^2} = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \quad \ell \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

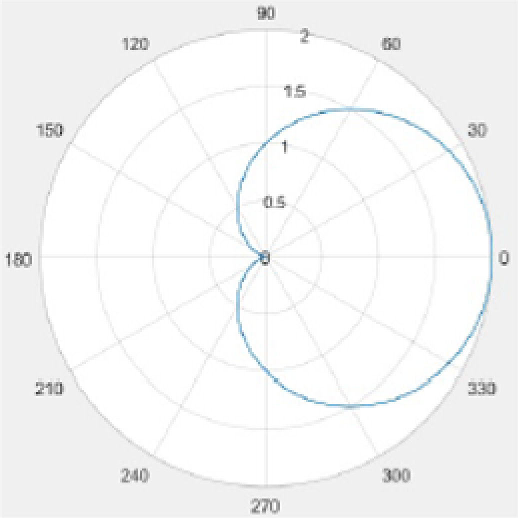
$$\Rightarrow \quad \ell = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i, \qquad \lambda = \max_{1 \le i \le n} \left| [x_{i-1}; x_i] \right|$$

$$\Rightarrow \quad \ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

Длина плоской кривой

1) пусть $y = f(x)$ на $[a, b]$	$\ell = \int\limits_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx.$
2) $x = x(t)$, $y = y(t)$ на $[\alpha, \beta]$	$\ell = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt$
3) $r = r(\varphi)$ на $[\alpha, \beta]$	$\ell = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi.$

Пример. Найти длину дуги кривой $r = 1 + \cos\varphi$, где $0 \le \varphi \le \pi/6$.



кардиоида

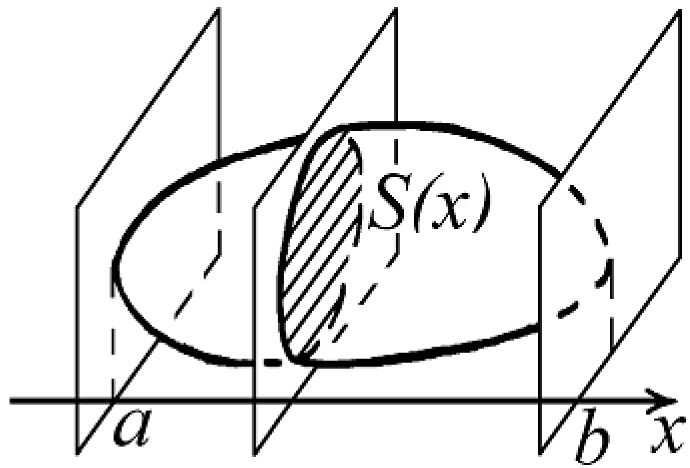
Решение.

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi .$$

3. Вычисление объема тела

I. ***По площадям параллельных сечений.***

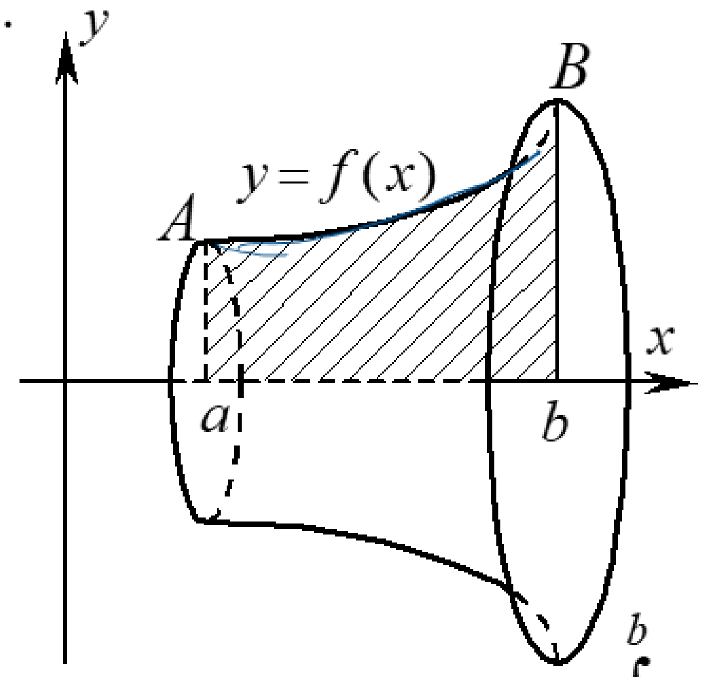
Пусть (V) – замкнутое и ограниченная область в $Oxyz$ (тело). Пусть $S(x)$ $(a \le x \le b)$ – площадь любого сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox.



Тогда объем тела (V) находят по формуле $V = \int_a^b S(x)dx.$

II. *Объем тела вращения.*

Пусть (V) – тело, которое получается в результате вращения вокруг Ox криволинейной трапеции с основанием [a; b], ограниченной $y = f(x)$.



Объем этого тела находят по формуле: $V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$